

Karl Lahmer

# Kernbereiche Philosophie

lebensnah und reflektiert

## Arbeitsblatt Logik

### Inhalt

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 1 Aussagenlogik .....   | 2  |
| 2 Prädikatenlogik ..... | 6  |
| 3 Syllogismus .....     | 9  |
| 4 Lösungshinweise ..... | 10 |

# 1 Aussagenlogik

Betonung: Paradoxon  
(Pl. Paradoxa)

## Vorüberlegungen: Logische Rätsel

Lesen Sie die beiden Paradoxa. Ein Paradoxon beinhaltet Aussagen oder Phänomene, die der üblichen Meinung zuwiderlaufen, Widersprüche aufzeigen und so zum Nachdenken anregen. Wenn Sie solche Paradoxa diskutieren, überlegen Sie Folgendes:

- Finden Sie in der Beweiskette logische Schwachstellen.
- Zeigen Sie, dass die Schlussfolgerung, die wahr erscheint, unwahr ist.

### a) Lügen die Bewohner der Insel Kreta?

Von einem Einwohner Kretas wird folgende Behauptung überliefert: Gegenüber einem Fremden soll er einmal gesagt haben: „Alle Kreter lügen!“ Der Fremde stutzte daraufhin mehrere Male und wusste nicht so recht, ob er diesem Kreter glauben könne. Kann er es oder nicht?

Notizen: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

### b) Streit vor Gericht

Ein junger Mann schließt mit einem berühmten Rechtsgelehrten, bei dem er Unterricht nehmen will, folgenden Vertrag: Er, der junge Mann, zahlt dem Rechtsgelehrten im Voraus das halbe Honorar; die zweite Hälfte aber erst dann, wenn er nach Absolvierung des Unterrichts einen Prozess gewinnt. Sollte er aber wider Erwarten seinen ersten Prozess verlieren, dann braucht er dem Rechtsgelehrten die zweite Hälfte nicht mehr zu bezahlen. Der Rechtsgelehrte geht auf diesen „Kuhhandel“ ein, verklagt aber den jungen Mann einige Zeit später auf die Zahlung der zweiten Honorarhälfte, nachdem dieser zwar den Unterricht abgeschlossen hat, aber nicht bereit ist, irgendeinen Prozess zu führen. Vor dem Gericht entspinnt sich dann zwischen den beiden folgende Diskussion: Der junge Mann: „Ich brauche die zweite Hälfte des Honorars auf keinen Fall zu bezahlen! Denn das ist ja mein erster Prozess! Verliere ich ihn, bin ich ja gemäß unserer Abmachung von der Zahlung befreit. Gewinne ich ihn aber, so brauche ich auch nicht zu zahlen. Der Richter spricht mich ja gegen deine Zahlungsforderung frei!“ Darauf der Rechtsgelehrte: „Du musst in jedem Fall zahlen! Verlierst du nämlich, so musst du laut Richterspruch – der Klage entsprechend – zahlen. Gewinnst du aber, so musst du zahlen gemäß unserer Honorar-Vereinbarung!“ Wer von beiden hat recht?\*

Notizen: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

\* Vgl. Wittschier, Michael: Abenteurer Philosophie. München: Piper 1997, S. 50 f.

Ein Ziel der Philosophie ist es, die Wirklichkeit, ihre Strukturen und Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und zu erklären. Dazu gehört ganz wesentlich die Fähigkeit, richtig und logisch zu denken. Ausgehend von Begriffen und Aussagen, beschäftigt sich ein Teilgebiet der Philosophie, nämlich die Logik, mit allgemeingültigen Denkgesetzen. Die Aussagenlogik beschäftigt sich primär damit, ob Aussagen formal wahr oder falsch sind.

### Begriffe und Aussagen

Ein Begriff ist die sprachliche Fassung einer Vorstellung. Das Wesen eines Begriffs versucht man durch eine Definition zu erfassen. Dabei wird das Definiendum (das zu Bestimmende, das Festzulegende) durch das Definiens (das Bestimmende, das Festlegende) festgelegt. Die Begriffe werden zu Aussagen oder Urteilen verknüpft:

- ▷ Der Mensch ist ein Vogel ohne Flügel.  
Mensch (Definiendum) = Vogel ohne Flügel (Definiens)
- ▷ Der Schimmel ist ein weißes Pferd.  
Schimmel (Definiendum) = weißes Pferd (Definiens)

### Schlüsse, Argumente

Ein Schluss besteht aus einer Anordnung von Aussagen oder Urteilen, wobei aus den Voraussetzungen (Prämissen) eine Folgerung (Konklusion) abgeleitet wird.

- ▷ Prämisse 1: Sokrates ist ein Mensch.
- ▷ Prämisse 2: Jeder Mensch ist sterblich.
- ▷ Konklusion: Also ist Sokrates sterblich.

Schlussfolgern heißt also, aus der angenommenen Wahrheit von Prämissen auf die Wahrheit eines anderen Satzes zu schließen. Schlüsse können gültig oder ungültig sein. Der folgende Schluss (Modus ponens) ist gültig:

- ▷ Prämisse 1: Wenn es regnet, ist die Straße nass.
- ▷ Prämisse 2: Es regnet.
- ▷ Konklusion: Die Straße ist nass.

Auch der folgende Schluss (Modus tollens) ist gültig:

- ▷ Prämisse 1: Wenn es regnet, ist die Straße nass.
- ▷ Prämisse 2: Die Straße ist nicht nass.
- ▷ Konklusion: Folglich regnet es nicht.

### Junktoren

Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit der Zusammensetzung komplexer Sätze mithilfe von Junktoren (Verknüpfungszeichen). Aussagen werden in Form von Kleinbuchstaben (p, q, r, s, t ...) dargestellt. Aussagen sind entweder wahr (= w) oder falsch (= f). Junktoren sind logische Verknüpfungen zwischen den Aussagen. Es werden vier Junktoren unterschieden:

| p | $\neg p$ |
|---|----------|
| w | f        |
| f | w        |

**1. Negation:** Zeichen  $\neg$ 

- ▷ Alltagssprachliche Ausdrücke: nicht, kein, nie, auf keinen Fall, unter keinen Umständen
- ▷ Formaler Ausdruck:  $\neg p$  (nicht p)
- ▷ Beispiel: Hermann ist kein Lehrer.
- ▷ Wahrheitswert: Die Negation einer Aussage hat den gegenteiligen Wahrheitswert. Sie verwandelt ihren Wahrheitswert in sein Gegenteil.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| w | w | w            |
| w | f | f            |
| f | w | f            |
| f | f | f            |

**2. Konjunktion:** Zeichen  $\wedge$ 

- ▷ Alltagssprachliche Ausdrücke: und, sowohl ... als auch, sowie, auch, außerdem
- ▷ Formaler Ausdruck:  $p \wedge q$  (p und q)
- ▷ Beispiel: Doris fährt Ski und sie trinkt Tee.
- ▷ Wahrheitswert: Die Konjunktion zweier Aussagen ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind; sonst ist die Aussage falsch.

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| w | w | w          |
| w | f | w          |
| f | w | w          |
| f | f | f          |

**3. Disjunktion** (einschließendes Oder): Zeichen  $\vee$ 

- ▷ Alltagssprachliche Ausdrücke: oder, vielleicht auch
- ▷ Formaler Ausdruck  $p \vee q$  (p oder q)
- ▷ Beispiel: Renate fährt nach Spanien oder sie fährt nach Frankreich (d. h., sie kann nach Spanien oder Frankreich fahren; sie kann aber auch nach Spanien und Frankreich fahren).
- ▷ Wahrheitswert: Die Disjunktion zweier Aussagen ist nur falsch, wenn beide Aussagen falsch sind; sonst ist die Aussage wahr.

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| w | w | w                 |
| w | f | f                 |
| f | w | w                 |
| f | f | w                 |

**4. Subjunktion:** Zeichen  $\rightarrow$ 

- ▷ Das Vorderglied ist der erste Teil der Aussage (wenn ...). Das Hinterglied ist der zweite Teil der Aussage (dann ...).
- ▷ Formaler Ausdruck:  $p \rightarrow q$  (wenn p, dann q)
- ▷ Beispiel: Wenn das Wasser 100 °C hat, dann kocht es.
- ▷ Wahrheitswert: Die Subjunktion zweier Aussagen ist nur falsch, wenn das Vorderglied der Aussage wahr und das Hinterglied falsch ist; sonst ist die Aussage wahr.

**Beispiele**

Gegeben: p ist wahr, q ist falsch.

Gesucht ist der Wahrheitswert von folgender Aussage:

| $\neg ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ |   |                                      |
|------------------------------------------|---|--------------------------------------|
| Schritt 1                                | w | f w                                  |
| Schritt 2                                | f | w                                    |
| Schritt 3                                | f | Gesamtaussage ist falsch (Negation). |

Gegeben: p ist wahr, q ist wahr, r ist falsch, s ist falsch.

Gesucht ist der Wahrheitswert von folgender Aussage:

| $(p \wedge q) \vee \neg (r \rightarrow s)$ |   |                           |   |   |
|--------------------------------------------|---|---------------------------|---|---|
| Schritt 1                                  | w | w                         | f | f |
| Schritt 2                                  |   | w                         | f | w |
| Schritt 3                                  |   | w Gesamtaussage ist wahr. |   |   |

Gegeben: p ist falsch, q ist falsch.

Gesucht ist der Wahrheitswert von folgender Aussage:

| $\neg ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ |   |                           |   |  |
|------------------------------------------|---|---------------------------|---|--|
| Schritt 1                                | f | f                         | f |  |
| Schritt 2                                |   | w                         | f |  |
| Schritt 3                                |   | w Gesamtaussage ist wahr. |   |  |

### Wahrheitstafeln

Mithilfe von Wahrheitstafeln lassen sich die Wahrheitswerte von komplexen Aussagen festlegen. Dabei werden alle Wahrheitswerte für die vorkommenden Aussagen eingesetzt. Wenn man alle möglichen Wahrheitskombinationen anschreibt und wenn man immer den Wahrheitswert wahr erhält, so ist die Aussage logisch wahr; es handelt sich um eine allgemeingültige Aussage. Erhält man immer nur einen der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch, so ist die Gesamtaussage logisch falsch. Erhält man unterschiedliche Ergebnisse (wahre und falsche), spricht man von einer kontingenten Aussage. *Beispiele:*

| p                     | $p \vee \neg p$ |
|-----------------------|-----------------|
| w                     | w w f           |
| f                     | f w w           |
| logisch wahre Aussage |                 |

| p q                 | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
|---------------------|----------------------------------------------|
| w w                 | w w w                                        |
| w f                 | f f w                                        |
| f w                 | w f f                                        |
| f f                 | w w w                                        |
| kontingente Aussage |                                              |

### Gültigkeit von Schlüssen

Wenn in keiner Zeile der Wahrheitstafel der Fall eintritt, dass alle Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist, so ist der Schluss gültig; sonst ist er ungültig.

| p                | q | $p \rightarrow q$ | p | Konklusion: q |
|------------------|---|-------------------|---|---------------|
| w                | w | w                 | w | w             |
| w                | f | f                 | w | f             |
| f                | w | w                 | f | w             |
| f                | f | w                 | f | f             |
| gültiger Schluss |   |                   |   |               |

| p                  | q | $p \rightarrow q$ | q | Konklusion: p   |
|--------------------|---|-------------------|---|-----------------|
| w                  | w | w                 | w | w               |
| w                  | f | f                 | f | w               |
| f                  | w | w                 | w | $\Rightarrow$ f |
| f                  | f | w                 | f | f               |
| ungültiger Schluss |   |                   |   |                 |

Die Methode der Wahrheitstafeln ist bei längeren Aussagen bzw. Schlüssen in ihrer Ausführung zu langwierig. Man verwendet daher die Methode der *Reductio ad absurdum*.

### Reductio ad absurdum (umgekehrte Methode)

Wir gehen davon aus, dass die Gesamtaussage falsch ist, und bestimmen davon ausgehend die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen. Wir gehen schrittweise von außen nach innen, von den komplexeren zu einfacheren Teilaussagen vor. Ist in einer Zeile ein Widerspruch hinsichtlich der Wahrheitswerte enthalten, so ist die betreffende Gesamtaussage logisch wahr. Erhält man eine Zeile ohne Widerspruch, so ist die Gesamtaussage nicht logisch wahr.

Beispiel

| $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Annahme                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   | f |
| Schritt 1                                                   | w |   | f |   | f |   |   |   |   |
| Schritt 2                                                   | w | w | f | f | w | f | f | f | f |
| Unmögliche Subjunktion, daher ist die Aussage logisch wahr. |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

## 2 Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik enthält alle aussagenlogischen Junktoren wie nicht, und, oder, wenn – dann.

- ▷ Prädikatenvariablen bezeichnen im weitesten Sinn Eigenschaften wie „gut, brav, rot, grün, Tiger, Mensch“. Es werden Großbuchstaben F, G, H, ... P, R verwendet.
- ▷ Freie Individuenvariablen bezeichnen Einzeldinge wie „Peter, Graz, die Blume da“. Es werden Kleinbuchstaben a, b, c ... verwendet.
- ▷ Gebundene Individuenvariablen dienen als Platzhalter. Es werden x, y, z verwendet.

Die folgenden Beispiele konkretisieren die Punkte:

- ▷ Fa Peter ist gut.  
a = Peter, F = die Eigenschaft, gut zu sein
- ▷ Gab Peter ist größer als Paul.  
a = Peter, b = Paul, G = die Eigenschaft größer

## Quantoren

$\forall$  Allquantor = alle                       $\exists$  Existenzquantor = einige, mindestens ein

▷  $\forall x (Mx \rightarrow Sx)$

Für alle x gilt: Wenn x ein M hat, dann ist x ein S.

$Mx$ : x ist ein Mensch,  $Sx$ : x ist sterblich.

Beispiel: Alle Menschen sind sterblich.

▷  $\neg \exists x (Mx \wedge Vx)$

Es ist nicht der Fall, dass für mindestens ein x gilt: x ist M + V.

$Mx$ : x ist ein Mensch,  $Vx$ : x ist vollkommen.

Beispiel: Kein Mensch ist vollkommen.

▷  $\neg \forall x (Mx \rightarrow Gx)$

Nicht für alle x gilt: Wenn x ein M ist, dann ist x ein G.

$Mx$ : x ist ein Mensch,  $Gx$ : x ist gesund.

Beispiel: Nicht alle Menschen sind gesund.

## Aufgaben

### 1. Aussagenlogik und Prädikatenlogik wiederholen

a) Formulieren Sie die Beispiele aussagenlogisch:

- Fritz und Franz sind intelligent. \_\_\_\_\_
- Beethoven komponierte neun Sinfonien, auch die Musik von „Fidelio“ stammt von ihm. \_\_\_\_\_

b) Formulieren Sie die Beispiele prädikatenlogisch:

- Susanne ist eifriger als Yvonne. \_\_\_\_\_
- Es gibt einige Hunde, die bellen. \_\_\_\_\_
- Manche Eisbären sind zwei Meter lang. \_\_\_\_\_

### 2. Logik-Rätsel: Zwei von fünf Kindern lügen

Johanna und Joel haben fünf Kinder: Julia, Johannes, Joachim, John und Jaqueline. Zwei der Kinder lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

Aus folgender Unterhaltung kann man bereits schlussfolgern, wer die beiden Lügner sind:

- Julia: „Johannes lügt nur dann, wenn John die Wahrheit sagt.“
- Johannes: „Wenn Joachim nicht lügt, dann ist entweder Julia oder John ein Lügner.“
- Joachim: „Jaqueline lügt, und auch Julia oder Johannes lügen.“
- John: „Wenn Johannes die Wahrheit sagt, dann auch Julia oder Joachim.“
- Jaqueline: „Unter den Personen Julia, Joachim und John befindet sich mindestens ein Lügner.“

Notizen: \_\_\_\_\_

**3. Logik-Rätsel: Brücke bei Nacht**

Eine Familie kommt nachts an eine baufällige Brücke und hat nur eine Taschenlampe mit schwacher Batterie. Die Familie hat noch 60 Minuten Zeit, die Brücke zu überqueren, bevor die Lampe ausgeht. Dabei gibt es folgende Probleme:

- a) Die Brücke ist baufällig, sodass maximal zwei Personen gleichzeitig die Brücke betreten können.
- b) Zur Überquerung benötigt man wegen der Löcher in der Brücke die Taschenlampe.
- c) Die Taschenlampe kann nicht geworfen werden, sie kann auch nicht vom Ufer aus anderen Personen den Weg leuchten.
- d) Die vier Personen (A, B, C, D) sind verschieden schnell und brauchen pro Überquerung 5 (A), 10 (B), 20 (C) und 25 (D) Minuten.

Wie kommt die ganze Familie rechtzeitig über den Fluss?

Notizen: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**4. Logik-Rätsel: Karten**

Vor Ihnen liegen vier Karten, die jeweils auf der Vorder- und Rückseite beschrieben sind. Sie sollen die folgende Regel auf ihre Richtigkeit prüfen: Wenn auf einer Seite ein Vokal steht, steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl. Welche Karten (siehe Rand) würden Sie umdrehen, um zu testen, ob diese Aussage tatsächlich zutrifft?

Notizen: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

E

K

4

7

### 3 Syllogismus

Eine andere Form, die Gültigkeit von Argumenten zu überprüfen, ist die Methode der Syllogistik (des richtigen Schlussfolgerns), die auf Aristoteles zurückgeht. Ein (sogenannter dreigliedriger) Syllogismus hat folgende Struktur: Aus zwei Urteilen (Prämissen, Voraussetzungen) wird auf ein drittes Urteil (Konklusion) geschlossen.

- ▷ Prämissen 1 (oder Obersatz): Alle Menschen (= Mittelbegriff) sind sterblich (= Prädikat).
- ▷ Prämissen 2 (oder Untersatz): Alle Österreicherinnen/Österreicher (= Subjekt) sind Menschen (= Mittelbegriff).
- ▷ Konklusion (oder Schlusssatz): Also sind alle Österreicherinnen/Österreicher (= Subjekt) sterblich (= Prädikat).

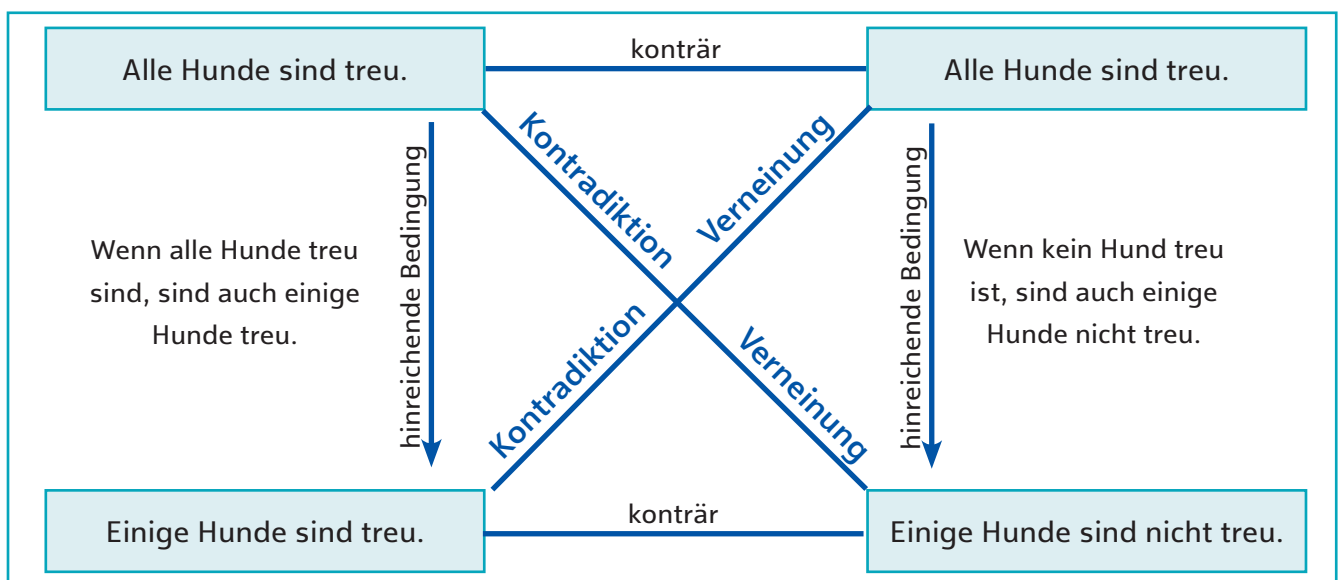
Folgende Beziehung ist wichtig: Das Prädikat (P) kommt auf der rechten Seite der Konklusion und im Obersatz vor, das Subjekt (S) auf der linken Seite der Konklusion und im Untersatz, der Mittelbegriff (M) im Obersatz und im Untersatz, nicht aber in der Konklusion.

#### Typen von Aussagen

Eine Aussage (oder ein Urteil) in einem Syllogismus setzt immer zwei Begriffe in eine Beziehung. Dabei werden vier Typen von Urteilen bezüglich der Beziehung zwischen einem Subjekt (S) und einem Prädikat (P) unterschieden:

- ▷ Allgemein bejahendes Urteil: Alle Hunde (S) sind treu (P).
- ▷ Allgemein verneinendes Urteil: Kein Hund (S) ist treu (P).
- ▷ Partikulär bejahendes Urteil: Einige Hunde (S) sind treu (P).
- ▷ Partikulär verneinendes Urteil: Einige Hunde (S) sind nicht treu (P).

Das sogenannte logische Quadrat ist ein Diagramm, das die Relation zwischen bestimmten Aussagen und deren Verneinungen darstellt.



#### Erklärungen

- ▷ konträr: Beide Urteile können zwar zugleich falsch sein, aber nicht zugleich wahr.
- ▷ subkonträr: Beide Urteile können zugleich wahr sein.
- ▷ kontradiktorisch: Nicht beide Urteile können wahr bzw. falsch sein.
- ▷ hinreichend: Das eine Urteil impliziert das andere, nicht aber umgekehrt.

## 4 Lösungshinweise

### Vorüberlegungen Seite 2

#### 1. Lügen die Bewohner der Insel Kreta?

- ▷ Variante 1: Wenn man den Begriff „lügen“ im Alltagssprachlichen Gebrauch als „manchmal lügen“ interpretiert, so ergibt sich kein Widerspruch, egal, ob man die Aussage des Kreters als wahr oder falsch bewertet.
- ▷ Variante 2: Wenn man den Begriff „lügen“ im Sinne von „immer lügen“ deutet, so ist die Aussage falsch.
- ▷ Variante 3: Denken Sie selbst weitere Varianten durch.

#### 2. Streit vor Gericht

Das Beispiel mit den Verträgen kann man als Dilemma bezeichnen. Ein Dilemma (griech. zweigliedrige Annahme oder Zwickmühle) bezeichnet eine Situation, die zwei Wahlmöglichkeiten bietet, welche jedoch beide zu einem unerwünschten Resultat führen. Es wird durch seine Ausweglosigkeit als paradox empfunden.

### Aufgaben Seite 7 f.

#### 1. Aussagenlogik und Prädikatenlogik wiederholen

- a)  $p \wedge q, p \wedge q$
- b)  $Eab, \exists x(Hx \rightarrow Bx), \exists x(Ex \wedge Mx)$

#### 2. Logik-Rätsel: Zwei von fünf Kindern lügen

Die Lügner sind Johannes und Jaqueline. Der einfachste Lösungsweg besteht darin, alle zehn Möglichkeiten auszutesten.

#### 3. Logik-Rätsel: Brücke bei Nacht

Entscheidend ist, dass die zwei langsamsten Personen (C und D) gemeinsam die Brücke überqueren und keiner der beiden noch einmal zurückmuss, um die Taschenlampe zurückzubringen:

- ▷ hin: A und B (10 Minuten)
- ▷ zurück: A (+5 Minuten)
- ▷ hin: C und D (+25 Minuten)
- ▷ zurück: B (+10 Minuten)
- ▷ hin: A und B (+10 Minuten)

#### 4. Logik-Rätsel: Karten

Die meisten werden Karte E umdrehen: Wenn auf ihrer Rückseite keine gerade Zahl steht, ist die Regel falsch. Aber auch 7 ist möglich. Wenn nämlich auf der Rückseite von 7 ein Vokal steht, stimmt die Regel ebenfalls nicht, denn dann müsste auf der Vorderseite eine gerade Zahl anstelle der 7 stehen. Wenn Sie die Karte 4 umgedreht haben, haben Sie sich getäuscht; das hilft ebenso wenig wie K umzudrehen. In beiden Fällen kann die Regel gültig sein, unabhängig davon, was auf der Rückseite steht.